

CONSTRUINDO O CONCEITO DE FUNÇÃO EXPONENCIAL A PARTIR DOS OBJETOS DIGITAIS DE APRENDIZAGEM “TORRE DE HANÓI” E “GEOGEBRA”.

Dejair Frank Barroso¹

Resumo

O artigo discute as características de Objetos de aprendizagem (OA) que favorecem a aquisição do conceito da função exponencial, a partir de dois estudos realizados. No primeiro estudo foram comparadas as estratégias adotadas por alunos do 3º ano do ensino médio para construção de uma tabela utilizando o experimento digital Torre de Hanói, esse desafio matemático consiste em passar sete discos, arranjados em ordem decrescente, de um pino para outro, com a ajuda de um terceiro. No segundo estudo, os estudantes seguindo o roteiro de orientação proposto pelo professor construíram o gráfico da função estabelecida no primeiro estudo, utilizando o OA GeoGebra. Os resultados mostram que a transposição didática através de objetos digitais contribui na motivação, na iniciativa e na colaboração entre os estudantes.

Palavras Chaves: Aprendizagem; Software; Motivação.

1. Introdução

À medida a que se integre ao que se denomina uma sociedade da informação crescentemente globalizada, é importante que o ensino da matemática volte para o desenvolvimento de capacidades de comunicação, resolver problemas, de tomar decisões, de fazer inferências, de criar, de aperfeiçoar conhecimentos e valores, de trabalhar cooperativamente. Hoje, o uso da informática nas aulas de matemática vem contribuindo para a inserção digital dos estudantes, o desenvolvimento de valores e atitudes, criatividade e o trabalho coletivo de elaboração do conhecimento. A este respeito, (BORBA E PENTEADO, 2007, p.17) nos esclarecem:

¹ Informática na Educação – Mestrado Profissional em Educação Matemática
Instituto de Ciências Exatas – Campus Universitário - Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF) – Bairro Martelos - 36.036-900 - Juiz de Fora – MG - Brasil
dejairbarroso@click21.com.br

[...] O acesso à informática deve ser visto como um direito e, portanto, nas escolas públicas e particulares o estudante deve poder usufruir de uma educação que no momento atual inclua, no mínimo, uma “alfabetização tecnológica”. [...] Assim, o computador deve estar inserido em atividades essenciais, tais como aprender a ler, escrever, compreender textos, entender gráficos, contar, desenvolver noções espaciais etc. E, nesse sentido, a informática na escola passa a ser parte da resposta a questões ligadas à cidadania.

Para impulsionar o uso da informática nas escolas públicas, o PROINFO – Programa Nacional de Informática na Educação, lançado em 1987 pela Secretaria de Educação a Distância (Seed/MEC), através de parcerias com outros ministérios, governos estaduais, municipais, organizações não-governamentais e empresas, tem dirigido esforços para aquisição de equipamentos e softwares e também capacitação de professores. Outra importante iniciativa do MEC é difundir o uso da TICs nas salas de aula, em particular, o projeto RIVED tem apoiado tanto a produção de objetos de aprendizagem digitais quanto o seu uso pelas escolas. Segundo os PCN’s, “a utilização de recursos como o computador e a calculadora podem contribuir para que o processo de ensino aprendizagem de Matemática se torne uma atividade experimental mais rica, sem riscos de impedir o desenvolvimento do pensamento, desde que os estudantes sejam encorajados a desenvolver seus processos metacognitivos e sua capacidade crítica...” (Brasil, 1998, p.45).

Os objetos de aprendizagem relatados neste artigo teve por objetivos: estimular o uso da informática na transposição didática do conteúdo para as aulas de matemática; promover a interação professor/estudante, difundir o uso dos softwares “Torre de Hanói” e “GeoGebra”, e avaliar a contribuição deles para o ensino e aprendizagem da função exponencial.

2. Objetos de Aprendizagem

A utilização de Objetos de Aprendizagem – OA como recurso didático de interação na educação a distância ou presencial é assunto recente e que ainda encontra-se em discussão. Os primeiros estudos começaram no ano de 2000 com David Wiley definindo OA como sendo “qualquer recurso digital que possa ser reutilizado para o suporte de ensino” (WILEY, 2000 apud CASTRO E MACÊDO, p. 333). A principal idéia dos Objetos de aprendizagem é quebrar o conteúdo educacional em pequenos pedaços que possam ser reutilizados em diferentes ambientes de aprendizagem, em um espírito de programação orientada a objetos.

Os Objetos de Aprendizagem são pequenos instrumentos, na maioria das vezes digitais, que podem ser utilizados diversas vezes. Podem ser vídeos, imagens, figuras, gráficos, jogos e outros que podem ser disponibilizados para auxiliar na transposição didática do conteúdo, possibilitando a motivação, a cooperação e a interação através de diálogos entre professor e estudante. Porém, tal perspectiva só pode ser concretizada por meio do planejamento cuidadoso de atividades que estimulem a formação de uma postura investigativa por parte dos estudantes e da preparação e motivação dos professores para conduzi-las.

3. Objeto de Aprendizagem Torre de Hanói

Este objeto de aprendizagem está disponível no site www.matematica.br, projeto **iMática**, mantido por professores e alunos do IME-USP, coordenado pelo professor Dr. Leônidas de Oliveira Brandão.

A concepção deste objeto de aprendizagem digital foi baseada no material concreto, comercializado em madeira, que possibilita simular ações de uma pessoa transferindo discos de uma haste para outra.

Como usar: Clique na base das hastes (num retângulo com a letra "A", "B" ou "C"), primeiro na origem depois na haste de destino. Por exemplo, se desejar mover o disco do topo da haste B para a haste C, clique primeiro em B e depois em C. Para alterar o número de disco, selecione a opção na lista (à direita). Para começar "novo jogo", clique no botão "Atualiza".

Objetivo: Mover todos os discos da haste A para a haste C, utilizando o menor número possível de movimentos, respeitando-se as regras abaixo.

Regras: 1ª) um disco maior não pode ser colocado sobre um disco menor; 2ª) pode-se mover um único disco por vez; 3ª) um disco deve estar sempre numa das três hastes, ou em movimento.

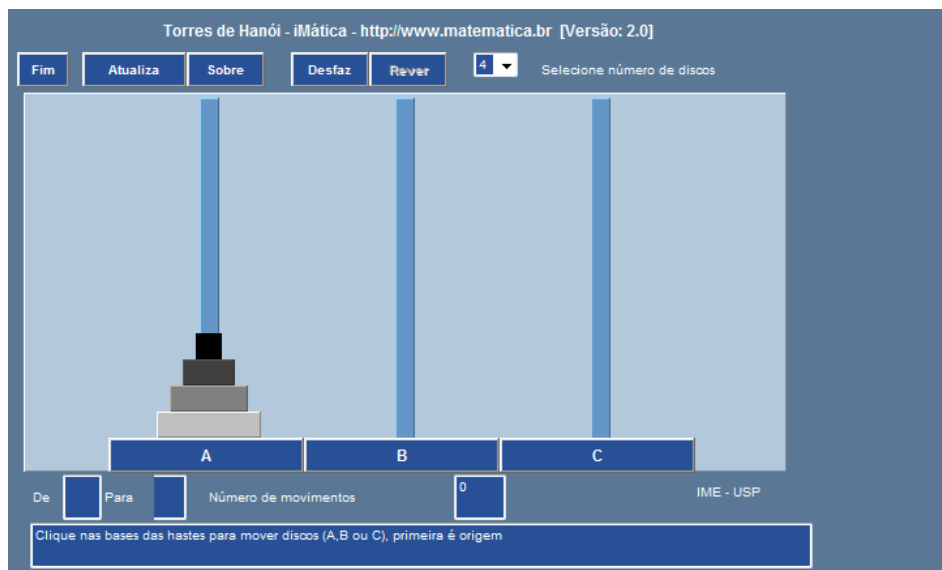


Figura 1: A torre de Hanói – interface gráfica

4. Objeto de Aprendizagem GeoGebra

Software livre, disponível em www.geogebra.org desenvolvido pelo professor Markus Hohenwarter, austríaco, formado pela Universidade de Salzburg, voltado para escolas secundárias.

GeoGebra (Geometria e Álgebra) tem como característica duas janelas: sistema dinâmico da geometria que permite construções com pontos, vetores, segmentos, secções cônicas, retas e funções, pode mudá-las como quiser. A outra janela, as equações e as coordenadas são incorporadas diretamente. Uma expressão na janela da álgebra corresponde a um objeto na janela da geometria, e vice versa.

As expressões em Latex permitem escrever símbolos e fórmulas matemáticas na barra de entrada na parte inferior da tela.

A interface oferece muitas construções geométricas e algébricas que precisam ser direcionadas pelo professor de acordo com suas necessidades pedagógicas.

5. Descrição do Ambiente em que foi aplicado os Objetos de Aprendizagem

O presente artigo faz parte do trabalho final da disciplina Informática na Educação do Mestrado Profissional em Educação Matemática da UFJF, e foi desenvolvido em parceria com o Colégio Pio X, localizado na cidade de Santos Dumont/MG, durante o mês de junho de 2009. Foram selecionados seis (6) alunos do 3ª ano do ensino médio do turno matutino, dos quais sou professor, mediante disponibilidade para comparecer fora do horário convencional de estudo e

interesse em estudar o assunto função exponencial. O laboratório de informática dispõe de 15 (quinze) computadores, com acesso a internet via rádio e um servidor.

6. Procedimentos Didáticos

As atividades foram desenvolvidas em seis encontros com duração de uma hora e trinta minutos cada um, durante o mês de junho, com o professor (autor deste artigo). Os estudantes realizaram as atividades individualmente no laboratório de informática.

A seqüência didática foi desenvolvida do seguinte modo:

1º Encontro: Inicialmente, foi apresentado o software “Torre de Hanói” e realizado uma abordagem da lenda deste jogo, que se encontra no próprio objeto didático: O problema das torres de Hanói foi proposto pelo matemático francês Edouard Lucas, em 1883. Lucas elaborou para seu “invento” uma lenda curiosa sobre uma torre muito grande. A “torre de Brama”, que foi criada “início dos tempos”, com três hastes contendo 64 discos concêntricos. O “criador” do universo também criou uma comunidade de monges cuja única atividade seria mover os discos da haste original (“A”) para uma de destino (“C”). O “criador” estabeleceu que o mundo acabaria quando os monges terminassem sua tarefa. Porém, os monges deveriam respeitar as três regras na sua execução. Assim, o desafio inicial deste jogo é encontrar a regra de movimentação ótima (que atinja o objetivo, com um número mínimo de movimentos) e com isso poderá estimar quanto tempo ainda nos “resta” (segundo a lenda!!)

Para atingir o segundo objetivo do jogo (estimar o tempo restante), suponha que cada disco leve 1 segundo para ser movido. Tente encontrar uma fórmula que, dado “n” devolva o número mínimo de movimentos para “n” discos”.

Com base nessa lenda, foi organizada uma tabela em que os estudantes individualmente registraram o número de movimentos necessários para transferir um, dois, três, quatro, cinco, seis ou os sete discos para o outro pino. Levando em consideração as três regras básicas.

2º Encontro: Como no primeiro encontro nenhum estudante estabeleceu o número mínimo de movimentos para sete discos, retomaram o jogo torre de Hanói para alcançar tal objetivo. Os estudantes trocaram algumas idéias, onde destaco dois relatos:

Estudante 2: Quando a quantidade de discos a ser transferida é ímpar, começo remanejando para a haste “C”, caso contrário, se a quantidade é par, começo pela haste “B”. Assim, consigo sempre finalizar na haste “C”.

Estudante 5: Então, podemos seguir esse princípio em todo transcorrer do jogo. Quando quero remanejar quantidade ímpar de discos para uma haste, começo por esta, se a quantidade é par, começo pela outra haste, que não a de destino.

Esta idéia possibilitou a todos conseguirem transferir os sete discos da haste “A” para haste “C” com o menor número de movimentos, consolidando na seguinte tabela:

Quantidade de Discos	Número Mínimo de Movimentos
1	1
2	3
3	7
4	15
5	31
6	63
7	127
n	...

Tabela 1: consolidado final

Perguntei aos estudantes, qual a expressão matemática que representa o número mínimo de movimentos?

Estudante 3: acho que é duas vezes o número de movimentos anterior mais um.

Fiz a seguinte intervenção: como faço para determinar o número mínimo de movimentos para 30 discos?

Estudante 1: é preciso saber primeiro o número de movimentos para 29 discos.

Estudante 4: apesar da expressão funcionar, ela ainda não é ideal.

Estudante 5: é 2^{n-1} , onde n é o número de discos.

Perguntei, funciona para dois, três, qualquer número de discos?

Estudante 6: não, não.

Estudante 2 e Estudante 5: menos 1 é fora do expoente.

Perguntei: então, como fica a nova expressão?

Estudante 5: dois elevado a “n” menos 1, $(2^n - 1)$.

Estudante 4: assim, para 30 discos, basta fazer $2^{30} - 1$.

Fiz novo questionamento: como fica o número mínimo de movimentos para os 64 discos propostos na lenda do jogo?

Todos os estudantes responderam: $2^{64} - 1$.

3º Encontro: Apresentei as seguintes tabelas com potências para serem completadas:

Tabela 2

X	$Y=2^x$	Par ordenado	Ponto
-4	$Y=2^{-4}=1/16$	$(-4,1/16)$	A
-3	$Y=2^{-3}=1/8$	$(-3,1/8)$	B
-2	$Y=2^{-2}=1/4$	$(-2,1/4)$	C
-1	$Y=2^{-1}=1/2$	$(-1,1/2)$	D
0	$Y=2^0=1$	$(0,1)$	E
1	$Y=2^1=2$	$(1,2)$	F
2	$Y=2^2=4$	$(2,4)$	G
3	$Y=2^3=8$	$(3,8)$	H
4	$Y=2^4=16$	$(4,16)$	I

Tabela 3

X	$Y=(1/2)^x$	Par ordenado	Ponto
-4	$Y=(1/2)^{-4}=16$	$(-4,16)$	J
-3	$Y=(1/2)^{-3}=8$	$(-3,8)$	K
-2	$Y=(1/2)^{-2}=4$	$(-2,4)$	L
-1	$Y=(1/2)^{-1}=2$	$(-1,2)$	M
0	$Y=(1/2)^0=1$	$(0,1)$	N
1	$Y=(1/2)^1=1/2$	$(1,1/2)$	O
2	$Y=(1/2)^2=1/4$	$(2,1/4)$	P
3	$Y=(1/2)^3=1/8$	$(3,1/8)$	Q
4	$Y=(1/2)^4=1/16$	$(4,1/16)$	R

Todos os estudantes completaram as tabelas sem dificuldades.

Com antecedência, já havia instalado em seis computadores o software GeoGebra e verificado o funcionamento perfeito de todos. Utilizando o projetor datashow fiz a apresentação do objeto de aprendizagem GeoGebra, destacando suas principais características e também como manipular alguns recursos, principalmente aqueles necessários para execução das atividades propostas. Nenhum estudante ainda havia trabalhado com o GeoGebra, todos demonstraram iniciativa, motivação e interação para receber as orientações. Eles também tiveram muita facilidade para manipulação das ferramentas e aprovaram o uso do software nas aulas de matemática, por apresentar recursos de imagens se movimentando, o que nos livros não é possível.

Atividade proposta: Exercício e Prática

- Marque todos os pontos (x,y) das tabelas 2 e 3 no plano cartesiano (Geogebra).
- Escreva as funções, na barra de entrada na parte inferior da tela, cujos gráficos, passem por todos os pontos marcados no plano cartesiano.

Todos os estudantes realizaram as atividades, tendo dois deles recebido orientações de outros para escrever as funções na barra de entrada.

Depois da construção dos gráficos pelos estudantes, coloquei o seguinte roteiro:

Agora Responda

- Qual o domínio dessas funções?

- Qual o conjunto imagem dessas funções?
- Qual o ponto de interseção das curvas com o eixo das ordenadas?
- As curvas interceptam o eixo das abscissas? Por quê?
- Qual função é crescente? E qual é decrescente?

Nesse momento de questionamento, os estudantes se mostraram concentrados, interagindo entre si, propondo conjecturas: um deles afirmou que os gráficos tocariam o eixo das abscissas, outro disse que não, pois o conjunto imagem sendo os reais positivos, o zero e os números reais negativos estariam excluídos. Também concluíram observando as coordenadas dos pontos na janela da álgebra e o plano cartesiano (janela da geometria), que aumentando o valor de x , se o valor de y aumenta, então a função é crescente, e que aumentando o valor de x , se o valor de y diminui, então a função é decrescente.

4º Encontro: Construindo o conceito de Função Exponencial no GeoGebra.

- No plano cartesiano, insira um seletor, note que ele foi denominado “a” com variação $[-5,5]$;
- Como estudamos anteriormente, uma função exponencial é dada por $f(x) = ax$, com $0 < a \neq 1$. Crie essa função na barra de entrada na parte inferior da tela.
- Mova o parâmetro “a” e observe atentamente o que acontece com o gráfico construído.

Roteiro para construção da definição pelos estudantes:

- O que ocorre quando você varia o valor de “a”? Por quê?
- O que acontece com a sua função quando o parâmetro “a” é um? Apesar de não ser uma função exponencial, que tipo de função você obteve?
- O que acontece com a sua função quando o parâmetro “a” é zero? Apesar de não ser uma função exponencial, que tipo de função você obteve?
- O que acontece com sua função quando o parâmetro “a” é negativo?
- É possível que o gráfico de uma função exponencial passe por todos os quadrantes? Por quê?
- Qual o conjunto domínio da sua função?
- Qual o conjunto imagem da sua função? Quando uma função exponencial é crescente? E decrescente?

Nessa atividade, os estudantes puderam através da movimentação do parâmetro “a”, visualizar na tela o comportamento da função definida pela sentença $f(x) = a^x$ para

$0 < a \neq 1$, quando $a > 0$; quando $0 < a < 1$; $a = 1$ e até mesmo quando $a < 0$. Alguns ficaram intrigados porque não apareceu o gráfico para $a = 0$ e $a < 0$. Após algumas discussões entre eles, alguém sugeriu clicar com o botão direito do mouse sobre o eixo das abscissas e em propriedades selecionar cor e escolher uma, imediatamente realçará a semi-reta à direita da origem no plano cartesiano (quando $a = 0$ e $x > 0$), concluindo que seria uma função constante $f(x) = 0$, com restrição de domínio para reais positivos. Já no caso de $a < 0$, eles perceberam que a definição estava sendo “ferida”, porém ficaram confusos para fazer a justificativa. Pedi que considerassem $a = -2$ e $x = 1/2$, logo constataram a contradição. Do mesmo modo, também, visualizaram que quando $a = 1$, trata-se de uma função constante $f(x) = 1$.

5º Encontro: A fim de consolidar o uso dos objetos digitais, pedi aos estudantes que construíssem o gráfico da equação estabelecida no jogo torre de Hanói $y = 2^x - 1$, e fizessem a comparação com o gráfico da equação $y = 2^x$, ambos no mesmo plano cartesiano (GeoGebra). Questionei: por que o gráfico da equação $y = 2^x - 1$ está interceptando o eixo das abscissas?

Todos responderam que cada valor da ordenada sofreria uma redução de uma unidade. Por isso, o gráfico sofreria um deslocamento de uma unidade para baixo.

Perguntei: Qual o conjunto imagem desta função ($y = 2^x - 1$)?

Todos estudantes responderam: $D = \{y \in \mathbb{R} / y > -1\}$.

Outra atividade (em grupo de dois): construa o gráfico da função $y = 2^x$. Com base nele, faça os gráficos das funções $y = 2^{x+1}$ e $y = 2^x + 1$, num mesmo plano cartesiano. Que diferenças vocês observam entre os três gráficos?

Construindo os gráficos das funções os alunos perceberam que o gráfico da função $y = 2^x + 1$ é o gráfico da função $y = 2^x$ deslocado uma unidade para cima. Para o gráfico da função $y = 2^{x+1}$ é o gráfico da função $y = 2^x$ deslocado de uma unidade à esquerda em cada abscissa, pois a ordenada será a mesma para valores uma unidade menores.

6º Encontro: Para verificar a compreensão do conceito da função exponencial pelos estudantes, sem o uso do GeoGebra, fiz a exploração da definição com aplicações relacionada a crescimento demográfico e de epidemia, e economia. Mesmo sem utilizar o objeto digital os estudantes mostraram o mesmo entrosamento, fazendo inferências e propondo conjecturas, características essas, adquiridas com o uso do software na transposição didática do conteúdo.

7. Conclusões

Segundo Philippe Perrenoud (2000, p. 138), os professores que sabem o que as novidades tecnológicas aportam, bem como seus perigos e limites, podem dar-lhes um amplo espaço em sua classe. Esse conhecimento é instrumento valioso do ensino e de aproximação com o aluno. Dentro desse contexto, a avaliação do experimento mostra que os objetos de aprendizagem “Torre de Hanói” e “GeoGebra” podem dar uma contribuição significativa para a transposição didática no ensino e aprendizagem do conteúdo de função exponencial, tanto para a formação de conceitos quanto para a prática de exercícios. Eles são fáceis de usar e têm uma boa interface gráfica. O jogo Torre de Hanói não é simplesmente um jogo de treinamento, ou seja, não requer uma habilidade matemática específica para se jogar. Entretanto, permite explorar certos conteúdos matemáticos que se revelam após um olhar mais atento, conforme discutido no estudo de caso deste artigo. O software em particular, se destaca ao permitir ao estudante a experimentação (ao jogar) e também explorar a complexidade do conjunto de soluções podendo usar o botão desfazer para fazer correções na busca da regra de movimentação ótima (que permite o menor número de movimentos).

Ao utilizar o GeoGebra para abordagem do sistema de coordenadas cartesianas, marcação de pontos e construção do gráfico da função exponencial, conteúdos já conhecidos pelos estudantes, mas não inteiramente dominados por eles, possibilitou levá-los a fazer inferências e propor conjecturas, criando um ambiente de maior interação e discussão de informações. Neste momento, predominou o desejo de participação dos estudantes em colocar suas interpretações e estratégias na construção das definições. A visível motivação deles se dava pelos recursos do objeto de aprendizagem utilizado, não apenas em apertar botões, mas visualizar a movimentação dos objetos construídos, situação que no livro didático ou no quadro de sala de aula, é algo estático, sem nenhuma animação.

Referências

BORBA, M. C. P.; GODOY, M. **Informática e Educação Matemática**. 3. ed., Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

BRANDÃO, Leônidas de O. **Programas para uso no Ensino da Matemática – iHanói**, 2000. Disponível em < www.matematica.br > acesso em 04 de junho de 2009.

CASTRO, José Aires; MACÊDO, Ana Angélica M.; MACÊDO, Laécio Nobre. **Avaliação de um Objeto de Aprendizagem com Bases nas Teorias Cognitivas**, Anais do XXVII congresso da SBC - XIII Workshop sobre Informática e Escola. Rio de Janeiro, 2007.

HOHENVARTER, Markus. **Ajuda do GeoGebra**, 2001. Tradução de Jorge Geraldes. Disponível em < <http://www.geraldes.net/versãoemportuguês> (pt pt) > acesso em 24 de abril de 2009.

HOHENVARTER, Markus. **GeoGebra 3.0 – Dynamic Mathematics for Schools**, 2001. Disponível em < <http://www.geogebra.org> > acesso em 18 de abril de 2009.

[PCN 97 a] BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática**. Brasília, 1997.

[PCN 97 b] BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática**. Brasília, 1997.

PERRENOUD, P. **10 novas competências para ensinar**. Porto Alegre: Artmed, 2000.